Correction du devoir maison $n°10$

1. On $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 2$.
2. (a) $f(x) = \frac{1}{1-(x+x^2-x^3)} \underset{x\to 0}{=} 1 + (x + x^2 - x^3) + (x + x^2 - x^3)^2 + (x + x^2 - x^3)^3 + o(x^3)$ i.e. $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} (1 + x + \cdots + x^n + o(x^n))(1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}))$.
   En développant ce produit, le k-ième coefficient de ce développement limité est égal au cardinal de $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i + 2j = k\}$ i.e. a_k. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x^2} = f(x)$ d'où $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$
3. On remarque que $P(1) = P'(1) = P(-1) = 0$. Donc 1 est racine multiple de P et -1 est racine simple de P. Or $\deg(P) = 3$, Par conséquent, $P = (X-1)^2(X+1)$.
4. D'après le théorème de la D.E.S., il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-x)^2}$. En calculant de deux manières différentes $\lim\limits_{x\to 1} f(x)(1-x)^2$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)(1+x)$, on obtient respectivement $c = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{4}$ puis en évaluant en 0, on obtient $b = \frac{1}{4}$. D'où $f : x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2}\right)$.
5. (a) Par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $g^{(k)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = (k+1)!$. D'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + o(x^n)$.
6. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + o(x^n)\right)$ i.e.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n)\,.$$

7. Par unicité du développement limité, $a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4} = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 \text{ si } n \text{ pair}\,; \\ \frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ impair}\,; \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, imaginons qu'il faille payer $n + 2$ euros, on peut payer sans pièce de 2€ (1 seule manière avec uniquement des pièces de 1€) ou utiliser au moins une pièce de 2€. Si on utilise une pièce de 2€, il faut ajouter à cette pièce n euros sans restrictions. D'où $a_{n+2} = 1 + a_n$.
   Par conséquent, si n est pair, en notant $k = \frac{n}{2}$, on obtient $a_n = a_{2k} = k + a_0 = k + 1 = \frac{n}{2} + 1$ et si n est impair, en notant $k = \frac{n-1}{2}$, on obtient $a_n = a_{2k+1} = k + a_0 = k + 1 = \frac{n+1}{2}$.